1104-05 **Printed Pages : 12**

Degree (Part-III) Examination, 2021

(Honours)

MATHEMATICS

[Paper : Fifth]

[PPU-D-III-(H)-MAT-5]

(Real Analysis)

Time : Three Hours] **[Maximum Marks : 100**

Note : This question paper is divided into **two** sections. Instructions are given in each section. Answer questions accordingly.

यह प्रश्न-पत्र दो खण्डों में विभक्त है। प्रत्येक खण्ड में निर्देश दिए गए हैं। प्रश्नों के निर्देशानुसार उत्तर दीजिए।

Section-A / खण्ड-अ

(Compulsory/अनिवार्य)

1. Answer all questions. Write True or False for each statement. [2×10=20]

सभी प्रश्नों के उत्तर दीजिए। प्रत्येक कथन के लिए सत्य या असत्य लिखिए।

https://www.ppuponline.com

(a) If $z = f(x, y)$ is totally differentiable, then f_x and f_y both exist finitely.

यदि $z = f(x, y)$ पूर्णतया अवकलनीय हो, तो f_x एवं f_y दोनों का ही सीमित अस्तित्व है।

(b) If $z = \sqrt{|xy|}$ then $\frac{dz}{dx} \neq 0$

यदि $z = \sqrt{|xy|}$ हो, तो $\frac{dz}{dx} \neq 0$

(c) The extremum of $f(x, y) = 6x - 4y - x^2 - 2y^2$ is at $(3, -1)$.

$f(x, y) = 6x - 4y - x^2 - 2y^2$ का चरमतम मान $(3, -1)$ पर है।

(d) The lower R–integral cannot exceed the upper R–integral.

निम्न R–समाकलन, उच्च R–समाकलन से ज्यादा नहीं हो सकता।

(e) A bounded function is always R–integrable.

एक परिबद्ध फलन सदैव R–समाकलनीय होगा।

https://www.ppuponline.com

(f) $\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

(g) $\iint_R e^{x+y} dxdy = ...$, where R is the region bounded by y = 0, x = 0 and x + y = 1.

$\iint_R e^{x+y} dxdy = ...$ जहाँ R, y = 0, x = 0 एवं x + y = 1 से परिबद्ध क्षेत्र है।

(h) The series $\cos x + \frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + ...$, converges uniformly on R. https://www.ppuponline.com

श्रेणी $\cos x + \frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + ...$ R पर एकसमान रूप से अभिसारी है।

(i) $\int_a^\infty \frac{1}{\sqrt{x}} \sin x \, dx$, a > 0, is convergent for finite values of x.

x के सीमित मानों के लिए $\int_a^\infty \frac{1}{\sqrt{x}} \sin x \, dx$, जहाँ a > 0, अभिसारी है।

https://www.ppuponline.com

(j) If $\sum a_n$ and $\sum b_n$ be two series of positive terms which converge to L and M respectively, then $\sum c_n$ converges to the sum LM, where $c_n = a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + ... + a_n b_1$

यदि $\sum a_n$ एवं $\sum b_n$ धनात्मक पदों की दो श्रेणियाँ हैं जो क्रमशः L और M पर अभिसारित होती हैं, तो $\sum c_n$ अभिसारित होगा योग LM पर, जहाँ $c_n = a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + ... + a_n b_1$.

Section-B / खण्ड-ब

Note : This section is divided into three groups. Answer **five** questions in all, selecting at least one from each group.

[16×5=80]

यह खण्ड तीन समूहों में विभाजित है। प्रत्येक समूह से कम-से-कम एक प्रश्न का उत्तर देते हुए कुल पाँच प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

Group-A / समूह-अ

2. State and prove Taylor's theorem for a function f(x, y) in teo variables. Use this theorem to find the conditions of extremum of f(x, y).

https://www.ppuponline.com

दो चरों के फलन f(x, y) के लिए, टेलर के प्रमेय का कथन लिखिए एवं इसे सिद्ध कीजिए। इस प्रमेय का प्रयोग कर f(x, y) के चरमतम मानों की शर्त प्राप्त कीजिए।

3. (a) Given, $f(x,y)=\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, \quad (x,y)\neq(0,0)$

$= 0 \qquad (x, y) = (0, 0)$

Prove that (i) both f_x and f_y are continuous at (0, 0)
(ii) $f_{xy}(0,0) = 1$ and $f_{yx}(0, 0) = -1$.

दिया है, $f(x,y)=\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, \quad (x,y)\neq(0,0)$

$= 0 \qquad (x, y) = (0, 0)$

सिद्ध कीजिए (i) (0, 0) पर f_x एवं f_y दोनों ही सतत् हैं।
(ii) $f_{xy}(0,0) = 1$ एवं $f_{yx}(0, 0) = -1$

(b) P is a point inside the triangle ABC such that $PA^2 + PB^2 + PC^2$ is minimum. Find the position of P.

त्रिभुज ABC के भीतर एक बिन्दु P इस प्रकार है कि $PA^2 + PB^2 + PC^2$ न्यूनतम है। P की स्थिति ज्ञात कीजिए।

https://www.ppuponline.com

4 (a) Prove that, if a function f is totally differentiable at (x_0, y_0), then f is continuous at (x_0, y_0).

सिद्ध कीजिए, यदि फलन f: (x_0, y_0) पर पूर्णतया अवकलनीय है तो f, (x_0, y_0) पर संतत् है।

(b) Prove that, of all the rectangular parallelopiped of the same volume, the cube has the least surface.

सिद्ध कीजिए, सभी दिए आयतन के घनाभों में न्यूनतम पृष्ठ क्षेत्रफल एक घन का होता है।

5 (a) Define R–integrability on [a, b]. Show that if f be defined on [a, b] by, $f(x) = k$, $\forall x \in [a, b]$, where k is a constant then prove that $f \in R$ [a, b] and $\int_a^b f(x)dx = k(b-a)$.

[a, b] पर R–समाकलनीयता की परिभाषा दीजिए। यदि f, [a, b] पर परिभाषित हो, $f(x) = k$, $\forall x \in [a, b]$ जहाँ k एक अचर है, के द्वारा; तो सिद्ध कीजिए कि, $f \in R$ [a, b] एवं $\int_a^b f(x)dx = k(b-a)$

(b) Prove that, if f is continuous on [a, b] then $f \in R$ [a, b]

https://www.ppuponline.com

सिद्ध कीजिए कि यदि f, [a, b] पर सतत् हो तो $f \in R[a, b]$.

Group-B / समूह-ब

6. (a) Let $f \in R[a, b]$, $(b \geq a)$ and m, M be the bounds of f on [a, b] then prove that, $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$.

यदि $f \in R[a, b]$, $(b \geq a)$ हो एवं f के [a, b] पर m और M बंधन हों तो सिद्ध कीजिए, $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$.

(b) Show that the integral of an integrable function is continuous.

सिद्ध कीजिए, एक समाकलनीय फलन का समाकलन सतत् होता है।

7. (a) Test the convergence of the integral $\int_0^\infty \frac{\cos x}{1+x^2} dx$.

समाकलन $\int_0^\infty \frac{\cos x}{1+x^2} dx$ के अभिसारी होने की जाँच कीजिए।

https://www.ppuponline.com

(b) Evaluate:

मान निकालिए :

(i) $\int_0^\infty \frac{x^8(1-x^6)}{(1+x)^{24}} dx$

(ii) $\int_0^\infty \frac{x^4(1+x^5)}{(1+x)^{15}} dx$

8. (a) State and prove Stoke's theorem.

स्टोक्स के प्रमेय का कथन लिखिए और इसे सिद्ध कीजिए।

(b) If S be the upper half surface of the sphere $x^2+y^2+z^2=1$ and C be its bounding curve, then verify Stokes' theorem for $\vec{F} = y\vec{i} + z\vec{j} + x\vec{k}$.

यदि $x^2+y^2+z^2=1$ गोले की ऊपरी अर्धसतह S हो एवं इसका परिबद्ध वक्र C हो तो $\vec{F} = y\vec{i} + z\vec{j} + x\vec{k}$ के लिए स्टोक्स के प्रमेय की पुष्टि कीजिए।

Group-C / समूह-स

9. (a) Define uniform convergence of (i) sequence and (ii) series of functions. State and prove Weierstrass's M-test for uniform convergence.

https://www.ppuponline.com

फलनों के (i) अनुक्रम एवं (ii) श्रेणी की एकसमानरूपी अभिसारिता की परिभाषा दीजिए। एकसमानरूपी अभिसारिता के लिए वियरस्ट्रास के M-परीक्षण का कथन लिखिए एवं इसे सिद्ध कीजिए।

(b) Does the sequence {fn} where $fn(x) = nx(1-x)$ converge uniformly on [0, 1]?

क्या अनुक्रम {fn} जहाँ $fn(x) = nx(1-x)$, अन्तराल [0, 1] पर एकसमानरूप से अभिसारी है?

10. (a) Test for the uniform convergence of the series :

(i) $\Sigma \frac{x}{(n+x)^2}$ and (ii) $\Sigma \frac{x}{n(1+nx^2)}$

श्रेणियों (i) $\Sigma \frac{x}{(n+x)^2}$ एवं (ii) $\Sigma \frac{x}{n(1+nx^2)}$ की एकसमानरूपी अभिसारिता का परीक्षण कीजिए।

(b) Show that the sequence {fn} where $fn(x) = \frac{x}{1+nx^2}$ is uniformly convergent on R.

सिद्ध कीजिए कि अनुक्रम {fn} जहाँ $fn(x) = \frac{x}{1+nx^2}$ है, R पर एकसमानरूपी अभिसारी है।

https://www.ppuponline.com

11. (a) Show that, $\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)\ldots\ldots\infty$ converges to 1.

सिद्ध कीजिए कि, $\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)\ldots\ldots\infty$, मान 1 पर अभिसारित होता है।

(b) If $u_1, u_2, u_3, \ldots\ldots u_n, \ldots$ be a sequence of numbers between 0 and 1, then prove that $\prod_1^\infty (1+u_n)$ is convergent if Σu_n is convergent.

शून्य और 1 के बीच यदि $u_1, u_2, u_3, \ldots\ldots u_n, \ldots$ संख्याओं का अनुक्रम है तो सिद्ध कीजिए कि $\prod_1^\infty (1+u_n)$ अभिसारी होगा यदि Σu_n अभिसारी हो।

12. (a) Define a metric space. Let X be a non–empty set. For $x, y \in x$ we define,

$$d(x, y) = 0, \text{ if } x = y$$
$$= 1, \text{ if } x \neq y$$

Prove that d is a metric on x. What name is given to it?

https://www.ppuponline.com

एक दूरीक समष्टि की परिभाषा दीजिए। माना X एक अरिक्त समुच्चय है, $x, y \in x$ के लिए हम परिभाषित करते हैं,

$$d(x, y) = 0, \text{ यदि } x = y$$

$$= 1, \text{ यदि } x \neq y$$

सिद्ध कीजिए कि, d समुच्चय X पर एक दूरीक होगा। इसे कौन-सा नाम देते हैं?

(b) Define a topological space, let X be a non–empty set and T be the power set of X. Prove that, T is a topology on X.

एक संस्थिति समष्टि की परिभाषा दीजिए। माना कि, X एक अरिक्त समुच्चय है एवं X का घात समुच्चय T है। सिद्ध कीजिए कि T एक संस्थिति होगा X पर।

----- x -----

https://www.ppuponline.com
Whatsapp @ 9300930012
Send your old paper & get 10/-
अपने पुराने पेपर्स भेजे और 10 रुपये पायें,
Paytm or Google Pay से

https://www.ppuponline.com