1104-06 **Printed Pages : 12**

Degree (Part-III) Examination, 2021

(Honours)

MATHEMATICS

[Paper : Sixth]

[PPU-D-III-(H)-MAT-6]

(Group Theory/ Ring/ Linear Algebra)

Time : Three Hours] **[Maximum Marks : 100**

Note : This Question paper is divided into two sections. Answer as directed in each section.

यह प्रश्न-पत्र दो खण्डों में विभाजित है। प्रत्येक खण्ड से निर्देशानुसार उत्तर दीजिए।

Section-A/खण्ड-अ

(Compulsory /अनिवार्य)

1. Answer **all** questions. Write **true** or **false** for each statement : [2×10=20]

सभी प्रश्नों के उत्तर दीजिए। प्रत्येक कथन के लिए **सत्य** या **असत्य** लिखिए :

(a) An abelian group is solvable.

एक आबेली समूह हलीय होता है।

(b) A group of order 9 is abelian.

क्रम 9 का एक समूह अबेलियन होता है।

(c) In a group G, a map $f(x) = -x \forall x \in G$ is not an automorphism.

एक समूह G में एक प्रतिचित्रण $f(x) = -x \forall x \in G$ ऑटोमोर्फिज्म नहीं होता है।

(d) The polynomials over a ring form a ring.

एक वलय पर बहुपद एक वलय निर्मित करते हैं।

(e) If F be a field, then the number of ideals of ring $F \times F$ is 4.

यदि F एक क्षेत्र है, तो वलय $F \times F$ में आदर्शों की संख्या 4 है।

(f) A ring whose all elements are idempotent is a field.

एक वलय जिसमें सभी अवयव वर्गसम हैं, एक क्षेत्र है।

https://www.ppuponline.com

(g) If R^n is a vector space over the field R of real numbers then dim $R^n = n$.

यदि वास्तविक संख्याओं के क्षेत्र पर. R^n एक सदिश समष्टि है तो R^n की विमा = n.

(h) The vectors (1, 0, 1), (1, 1, 0) and (a, b, c) in R^3 are linearly independent if $a = b + c$.

यदि $a = b + c$ हो तो R^3 में सदिश (1, 0, 1) (1, 1, 0) एवं (a, b, c) रैखिक रूप में स्वतन्त्र होंगे।

(i) The characteristic polynomial of the matrix

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ is $x^2 - x - 5$.

आव्यूह $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ का अभिलाक्षणिक बहुपद $x^2 - x - 5$ है।

(j) If T is a linear transformation form R^2 to R^2 for which T (1, 0) = (a, b) and T(0, 1) =(c, d) then for $x, y \in R$, $T(x, y) = (ax + by, cx + dy)$.

यदि R^2 से R^2 में T एक रैखिक रूपान्तरण इस प्रकार हो कि T (1, 0) = (a, b) एवं T(0, 1) =(c, d) तो $x, y \in R$ के लिए $T(x, y) = (ax + by, cx + dy)$.

Section- B / खण्ड-ब

Note : This section is divided into three groups. Answer **five** questions in all, selecting at least **one** from each group. [16×5=80]

यह खण्ड तीन समूहों में विभाजित है। प्रत्येक समूह से कम से कम **एक** प्रश्न का उत्तर देते हुये कुल पाँच प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

Group- A / समूह-अ

2. (a) Define conjugacy of elements in a group G. Prove that the relation of conjugacy is an equivalence relation.

एक समूह G में संयुग्मी अवयवों की परिभाषा दीजिए। सिद्ध कीजिए कि संयुग्मता का सम्बन्ध एक समतुल्यता का सम्बन्ध होता है।

(b) Define c(a), the conjugate class of $a \in G$. Prove that :

(i) $c(a) = a \Leftrightarrow a \in Z(G)$

(ii) G is abelian $\Leftrightarrow c(a) = \{a\}, \forall a \in G$

$a \in G$ के संयुग्मी वर्ग $c(a)$ की परिभाषा दीजिए। सिद्ध कीजिए :

(i) $c(a) = a \Leftrightarrow a \in Z(G)$

(ii) G अबेलियन समूह से $\Leftrightarrow c(a) = \{a\}$,

$\forall a \in G$

3. (a) Define normaliser of an element of a group G. Prove that the normaliser is a subgroup of G.

एक समूह G के एक अवयव के प्रसामान्यक की परिभाषा दीजिए। सिद्ध कीजिए कि प्रसामान्यक G का एक उपसमूह है।

(b) If $O(G) = p^2$ where p is a prime number, then prove that G is abelian.

यदि $O(G) = p^2$ जहाँ p एक अभाज्य संख्या है। तो सिद्ध कीजिए कि G अबेली होगा।

4. Define a solvable group. Prove the following :

एक हलीय समूह की परिभाषा दीजिए। निम्न को सिद्ध कीजिए :

(a) a group G is solvable iff $G^{(n)} = \{e\}$, n is a positive integer.

एक समूह G हलीय होगा यदि और केवल यदि $G^{(n)} = \{e\}$, जहाँ n एक धनात्मक पूर्णांक है।

(b) a subgroup of a solvable group is solvable.

एक हलीय समूह का उपसमूह हलीय होगा।

Group- B / समूह-ब

5. Prove that the set R[x] of all polynomials over an arbitrary ring R is a ring with respect to the addition and multiplication of polynomials.

सिद्ध कीजिए कि बहुपद के योग एवं गुणन के सापेक्ष, किसी सापेक्ष किसी यादृच्छिक वलय R पर सभी बहुपदों का समुच्चय R[x] एक वलय होगा।

6. Prove that every integral domain can be embedded in a field.

सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक पूर्णांकीय प्रान्त एक क्षेत्र में सन्निहित किया जा सकता है।

7. (a) Define left and right ideals of a ring R and hence define ideal of a ring R. Prove that every ideal of R is a subring of R.

एक वलय के बायें एवं दायें आदर्शों की परिभाषा दीजिए एवं वलय R के आदर्श को परिभाषित कीजिए। सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक वलय R का आदर्श, R का उपवलय होगा।

(b) If S be an ideal of a ring R with unity e and $e \in S$, then prove that $S = R$.

यदि तत्समक e वाले वलय R का S एक आदर्श हो एवं $e \in S$ तो सिद्ध कीजिए $S = R$

8. (a) Prove that the intersection of two subrings is a subring.

सिद्ध कीजिए कि दो उपवलयों का सर्वनिष्ठ एक उपवलय होगा।

(b) Let R be a ring such that every subring of R is an ideal of R. Further ab = 0 in $R \Leftrightarrow a = 0$ or $b = 0$. Prove that R is commutative.

माना कि R एक वलय है इस प्रकार कि R का प्रत्येक उपवलय R का एक आदर्श है। इसके अलावा R में $ab = 0 \Leftrightarrow a = 0$ या $b = 0$ सिद्ध कीजिए कि R एक क्रमविनिमेय वलय है।

Group- C / समूह-स

9. (a) Define a subspace of vector space. Obtain the necessary and sufficient condition for C subset W of a vector space V(F) to be a subspace of V(F).

एक सदिश समष्टि की उपसमष्टि को परिभाषित कीजिए। सदिश समष्टि V(F) में उपसमुच्चय W के उपसमष्टि होने की आवश्यक एवं पर्याप्त शर्त ज्ञात कीजिए।

(b) Define linear sum of two subspaces of a vector space V(F) and prove that it is a subspace of V(F).

सदिश समष्टि V(F) के दो उपसमष्टियों के रैखिक योग को परिभाषित कीजिए एवं सिद्ध कीजिए कि यह भी एक उपसमष्टि होगा।

10. (a) Prove the existence of basis for a finite dimensional vector space.

एक सीमित सदिश समष्टि के आधार के अस्तित्व को सिद्ध कीजिए।

(b) Show that the set S = {(1, 0, 0), (1, 0, −1), (1, 1, 1)} is a basis of R^3 where R (a, b, c) with respect tpo the basis given by S

सिद्ध कीजिए कि R^3 में समुच्चय S – {(1, 0, 0), (1, 0, −1), (1, 1, 1)} एक आधार है, जहाँ R वास्तविक संख्याओं का क्षेत्र है। इस S द्वारा निरूपित आधार के सापेक्ष सदिश (a, b, c) के नियामक ज्ञात कीजिए।

11. (a) Define a linear transformation from a vector space U(F) to another vector space V(F). Also define its rank and nullity. Show that a linear transformation $T : U \to V$ is a one-one mapping iff N(T) = {0}.

एक सदिश समष्टि U(F) से दूसरे सदिश समष्टि V(F) पर रैखिक रूपान्तरण की परिभाषा दीजिए। इसकी कोटि और शून्यता को भी परिभाषित कीजिए। सिद्ध कीजिए कि रैखिक रूपान्तरण $T : U \to V$ एकैक प्रतिचित्रण होगा यदि और केवल यदि N(T) = {0} कोटि-शून्यता के कथन को लिखिए एवं इसे सिद्ध कीजिए।

(b) State and prove Rank-Nullity theorem.

कोटि-शून्यता के कथन को लिखिए एवं इसे सिद्ध कीजिए।

12. (a) Prove that the characteristic roots of a real symmetric matrix are all real.

सिद्ध कीजिए कि एक वास्तविक सममित आव्यूह के सभी अभिलाक्षणिक मूल वास्तविक होते हैं।

(b) Find the eigen values and eigen vector of

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

$A = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ के अभिलाक्षणिक मान एवं अभिलाक्षणिक सदिश ज्ञात कीजिए।

----- x -----