1104-04 Printed Pages : 16

Degree (Part-II) Examination, 2020

(Honours)

MATHEMATICS

[PPU-D-II(H)-MATH-4]

Time : Three Hours] [Maximum Marks : 100

Note : Candidates are required to give their answers in their own words as far as practicable. The questions are of equal value. Answer **five** questions in all. **First question** is **compulsory**. Besides this, attempt one question from each section.

परीक्षार्थी यथासम्भव अपने शब्दों में ही उत्तर दें। सभी प्रश्नों के मान बराबर हैं। कुल पाँच प्रश्नों के उत्तर दीजिए। **प्रथम प्रश्न अनिवार्य** है। इसके अलावा, प्रत्येक खण्ड से एक प्रश्न का उत्तर दीजिए।

1. (i) If $\bar{u} = t^2\hat{i} - t\hat{j} + (2t+1)\hat{k}$ and $\bar{v} = (2t-3)\hat{i} + \hat{j} - t\hat{k}$, then $\frac{d}{dt}(\bar{u}\cdot\bar{v})$ at t = 1 is :

(a) -4

(b) 4

(c) -6

(d) 6

यदि $\bar{u} = t^2\hat{i} - t\hat{j} + (2t+1)\hat{k}$ और $\bar{v} = (2t-3)\hat{i} + \hat{j} - t\hat{k}$, तब $\frac{d}{dt}(\bar{u}\cdot\bar{v})$ का t = 1 पर है :

(a) -4

(b) 4

(c) -6

(d) 6

(ii) If $\bar{v} = (x+3y)\hat{i} + (y-2z)\hat{j} + (x+az)\hat{k}$ and div $\bar{v} = 0$ then value of a is :

(a) 1

(b) -1

(c) 2

(d) -2

यदि $\bar{v} = (x+3y)\hat{i} + (y-2z)\hat{j} + (x+az)\hat{k}$ और $\text{div}\,\bar{v} = 0$, तब a का मान है :

(a) 1

(b) -1

(c) 2

(d) -2

(iii) If $\bar{r}$ is position vector of a point and $\bar{v}$ is any vector and $|\bar{r}| = r$, then $\bar{v}\cdot\left(\nabla\frac{1}{r}\right)$ is :

(a) $-\frac{\bar{v}\cdot\bar{r}}{r^2}$

(b) $-\frac{\bar{v}\cdot\bar{r}}{r^3}$

(c) $-\frac{2\bar{v}\cdot\bar{r}}{r^2}$

(d) $-\frac{2\bar{v}\cdot\bar{r}}{r^3}$

https://www.ppuponline.com

यदि $\bar{r}$ एक बिन्दु का स्थिति सदिश और $\bar{v}$ कोई सदिश तथा $|\bar{r}| = r$ है, तब $\bar{v}\cdot\left(\nabla\frac{1}{r}\right)$ है :

(a) $-\frac{\bar{v}\cdot\bar{r}}{r^2}$

(b) $-\frac{\bar{v}\cdot\bar{r}}{r^3}$

(c) $-\frac{2\bar{v}\cdot\bar{r}}{r^2}$

(d) $-\frac{2\bar{v}\cdot\bar{r}}{r^3}$

(iv) If $y = \tan^{-1}x$, then $\left(1+x^2\right)\frac{d^2y}{dx^2} =$

(a) $\frac{dy}{dx}$

(b) $x\frac{dy}{dx}$

(c) $2x\frac{dy}{dx}$

(d) $-2x\frac{dy}{dx}$

यदि $y = \tan^{-1} x$, तब $\left(1+x^2\right)\frac{d^2y}{dx^2} =$

(a) $\frac{dy}{dx}$

(b) $x\frac{dy}{dx}$

(c) $2x\frac{dy}{dx}$

(d) $-2x\frac{dy}{dx}$

(v) The orthogonal trajectory of curves xy =c, passing through the point (2, 1) is :

(a) $x^2 - y^2 = 3$

(b) $y^2 - x^2 = 3$

(c) $x^2 + y^2 = 5$

(d) $x^2 - 2y^2 = 1$

वक्रों xy =c के बिन्दु (2, 1) से जाते हुए लम्बवत् प्रक्षेप वक्र है :

(a) $x^2 - y^2 = 3$

(b) $y^2 - x^2 = 3$

(c) $x^2 + y^2 = 5$

(d) $x^2 - 2y^2 = 1$

(vi) Solution of the differential equation $(y^2 - xy)dx + x^2dy = 0$ is (c being constant) :

(a) $\frac{y}{x} = \ell_n x + c$

(b) $\frac{x}{y} = \ell_n x + c$

(c) $\frac{y}{x} = \ell_n y + c$

(d) $\frac{x}{y} = \ell_n y + c$

अवकल समीकरण $(y^2 - xy)dx + x^2dy = 0$ का हल है (जहाँ c स्थिरांक है) :

(a) $\frac{y}{x} = \ell_n x + c$

(b) $\frac{x}{y} = \ell_n x + c$

(c) $\frac{y}{x} = \ell_n y + c$

(d) $\frac{x}{y} = \ell_n y + c$

(vii) Forces of magnitude 1, 2, 3 act along the sides CA, AB and CB respectively of an equilateral triangle ABC of unit length. The moment of forces about the vertex A is :

(a) $2\sqrt{3}$

(b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

(c) $\sqrt{3}$

(d) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

एक इकाई वाले समबाहु त्रिभुज ABC की भुजाओं CA, AB एवं CB की दिशा में 1, 2, 3 कांतिमान वाले बल क्रमशः कार्यरत हैं। शीर्ष के सापेक्ष बलों का घूर्ण है :

(a) $2\sqrt{3}$

(b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

(c) $\sqrt{3}$

(d) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

(viii) The radial and transverse velocities of a particle are non-zero constants, then the path of the particle is :

(a) a spiral

(b) a circle

(c) a cardioid

(d) an ellipse

एक कण की त्रिज्यीय और अनुप्रस्थ वेग अशून्य अचर है, तब कण का पथ है :

(a) सर्पिल

(b) वृत्त

(c) हृदयाभ

(d) दीर्घवृत्त

(ix) Which of the following represents a stable motion ?

(a) $\frac{d^2x}{dt^2} = \mu x^2$

(b) $\frac{d^2x}{dt^2} = \mu x$

(c) $\frac{d^2x}{dt^2} = -\mu x$

(d) $\frac{d^2x}{dt^2} = -\mu x + \lambda x^2$

निम्न में कौन स्थिर गति को प्रतिरूपित करता है ?

(a) $\frac{d^2x}{dt^2} = \mu x^2$

(b) $\frac{d^2x}{dt^2} = \mu x$

(c) $\frac{d^2x}{dt^2} = -\mu x$

(d) $\frac{d^2x}{dt^2} = -\mu x + \lambda x^2$

(x) Let T_H be the time taken by a projectile up to the highest point and T be the time of flight, then :

(a) $T_H = \frac{2T}{3}$

(b) $T_H = \frac{T}{2}$

(c) $T_H = \frac{3T}{2}$

(d) $T_H = 2T$

माना कि किसी प्रक्षेपास्त्र को अधिकतम ऊँचाई तक पहुँचने में लगा समय T_H है और उड़ानकाल T है, तो:

(a) $T_H = \frac{2T}{3}$

(b) $T_H = \frac{T}{2}$

(c) $T_H = \frac{3T}{2}$

(d) $T_H = 2T$

Section - A

(खण्ड-क)

2. (a) If $u = x + y + z$, $v = x^2 + y^2 + z^2$, $w = yz + zx + xy$, then show that grad u, grad v and grad w are coplanar vector.

यदि $u = x + y + z$, $v = x^2 + y^2 + z^2$, $w = yz + zx + xy$, तब दर्शाइये कि grad u, grad v और grad w एकसमतलीय सदिश हैं।

(b) Show that $\nabla \cdot \left\{ \frac{f(r)}{r} \bar{r} \right\} = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left\{ r^2 f(r) \right\}$, where $\bar{r}$ is the position vector of a point and $|\bar{r}| = r$.

दिखाइये कि $\nabla \cdot \left\{ \frac{f(r)}{r} \bar{r} \right\} = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left\{ r^2 f(r) \right\}$, जहाँ $\bar{r}$ एक बिन्दु का स्थिति सदिश और $|\bar{r}| = r$ है।

3. (a) If $\bar{u}$ and $\bar{v}$ are continuously differentiable vector fields, then prove that

$$\text{div}(\bar{u} \times \bar{v}) = \bar{v} \cdot \text{curl}\, \bar{u} - \bar{u} \cdot \text{curl}\, \bar{v}$$

यदि $\bar{u}$ और $\bar{v}$ सततीय अवकलनीय सदिश क्षेत्र हैं, तब सिद्ध कीजिए कि

$$\text{div}(\bar{u} \times \bar{v}) = \bar{v} \cdot \text{curl}\, \bar{u} - \bar{u} \cdot \text{curl}\, \bar{v}$$ है।

https://www.ppuponline.com

(b) Find the work done in moving a particle once round the circle $x^2 + y^2 = a^2$, $z = 0$ under the force field given by

$$\bar{F} = (2x - y + z)\hat{i} + (x + y - z^2)\hat{j} + (3x - 2y + 4z)\hat{k}.$$

दिये गये बल क्षेत्र

$$\bar{F} = (2x - y + z)\hat{i} + (x + y - z^2)\hat{j} + (3x - 2y + 4z)\hat{k}$$

के अन्तर्गत एक कण को वृत्त $x^2 + y^2 = a^2$, $z = 0$ का एक चक्कर घुमाने में किये गये कार्य को ज्ञात कीजिए।

Section - B

(खण्ड-ख)

4. (a) Obtain differential equation whose solutions are as follows :

अवकल समीकरण प्राप्त कीजिए जिनके हल निम्न हैं :

(i) $Ax^2 + By^2 = 1$

(ii) $y = e^x(A\cos x + B\sin x)$

(b) Solve the differential equation

$$(1 + y^2)dx - (\tan^{-1} y - x)dy = 0$$

https://www.ppuponline.com

https://www.ppuponline.com

https://www.ppuponline.com

अवकल समीकरण :

$(1+y^2)dx-(\tan^{-1}y-x)dy=0$ को हल कीजिए

5. (a) Solve $\frac{d^2y}{dx^2}-y=x^2\cos x$

$\frac{d^2y}{dx^2}-y=x^2\cos x$ को हल कीजिए।

(b) Use the transformation $x^2 = u$, $y^2 = v$ to solve the differential equation

$$x^2\left(y-x\frac{dy}{dx}\right)=y\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$$

परिवर्तन $x^2 = u$, $y^2 = v$ का उपयोग करते हुए अवकल समीकरण $x^2\left(y-x\frac{dy}{dx}\right)=y\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$ को हल कीजिए

Section - C

(खण्ड-ग)

6. (a) A solid frustum of a paraboloid of height h and latus rectum 4a, rests with its vertex on the vertex of a paraboloid of revolution whose latus rectum

is 4b. Show that the equilibrium is stable if $h<\frac{3ab}{a+b}$.

एक परवलीय छिन्नक (ठोस) जिसकी ऊँचाई h एवं नाभिलम्ब 4a है, 4b नाभिलम्ब वाले परिक्रमणीय परवलीय के शीर्ष पर, अपने शीर्ष के साथ स्थिर है। दिखाईए कि साम्यावस्था स्थिर है यदि $h<\frac{3ab}{a+b}$ है।

(b) Four uniform rods are freely joined at their extremities and form a parallelogram PQRS, which is suspended by joint P and is kept in shape by a string PR. Prove that the tension of the string is equal to half the whole weight.

चार एकसमान छड़ें स्वतंत्र रूप से उनके सिरों पर जोड़े जाते हैं और वे एक समान्तर चतुर्भुज PQRS बनाते हैं जिसको P जोड से लटकाया जाता है और एक डोरी PR द्वारा उसे आकार में रखा जाता है । सिद्ध कीजिए कि डोरी का तनाव पूरे वजन के आधे के बराबर है।

7. Show that the length of an endless chain which will hang over a circular pulley of radius a so as to be in contact with two-third of the circumference of the pulley is

$$a\left[\frac{4\pi}{3}+\frac{3}{\log\left(2+\sqrt{3}\right)}\right]$$

दर्शाइये कि एक अनवरत जंजीर की लम्बाई जोकि एक वृत्ताकार घिरनी (त्रिज्या a) पर इस प्रकार लटकती है कि घिरनी की परिधि का 2/3 हिस्सा स्पर्श करती है,

$$a\left[\frac{4\pi}{3}+\frac{3}{\log\left(2+\sqrt{3}\right)}\right]$$ होगी।

Section - D

(खण्ड-घ)

8. (a) A particle moves along a circle $r = 2a\cos\theta$ in such a manner that its acceleration towards the origin is always zero. Show that transvers acceleration varies as the fifth power of $\operatorname{cosec}\theta$

एक कण किसी वृत्त $r = 2a\cos\theta$ के साथ इस तरह गति में है कि इसका मूल बिन्दु के तरफ त्वरण शून्य है। दिखाइए कि कण का अनुप्रस्थ त्वरण $\operatorname{cosec}\theta$ के पांचवीं घात के साथ परिवर्तित होता है।

(b) A particle moving in a straight line with simple harmonic motion has velocities v_1 and v_2 when its distance x_1 and x_2. Show that period of motion is $2\pi\sqrt{\frac{x_1^2-x_2^2}{v_2^2-v_1^2}}$

सरल आवर्त गति के साथ एक सीधी रेखा में बढ़ने वाले कण में इसकी दूरी x_1 और x_2 होने पर वेग v_1 और v_2 होते हैं। दर्शाइये कि गति की अवधि $2\pi\sqrt{\frac{x_1^2-x_2^2}{v_2^2-v_1^2}}$ है।

9. (a) A particle describes the curve $r = a\sin n\theta$ under a force F to the pole, where a and n are constants. Find the law of force

एक कण ध्रुव को एक बल F के तहत, वक्र $r = a\sin n\theta$ को निरूपित करता है जहाँ a और n अचर हैं। बल का नियम निकालिए।

(b) If u and v are the linear velocities of a planet when it is farthest and nearest to the sun, then prove that $\frac{1-e}{1+e}=\frac{v}{u}$, where e is the eccentricity of the orbit

यदि u और v किसी ग्रह के रैखिक वेग है जब सूर्य के सबसे दूर और सबसे नजदीक है, तब सिद्ध कीजिए कि $\frac{1-e}{1+e}=\frac{v}{u}$, जहाँ e कक्ष की उत्केन्द्रता है।

----- x -----